



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Радиоэлектроника»

# Рекурсивные дискретные фильтры

Учебное пособие  
по дисциплине

## «Цифровая обработка сигналов»

Автор  
Трофименко В. Н.

Ростов-на-Дону, 2014

Управление дистанционного обучения и повышения квалификации

Цифровая обработка сигналов



## Аннотация

Методическое пособие предназначено для студентов специальностей 210400, 210700 очной и заочной форм обучения.

## Автор



Доцент кафедры  
"Радиоэлектроника"  
Трофименко В.Н.



## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ.....</b>	<b>5</b>
РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	5
ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ.....	7
СТРУКТУРЫ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ .....	8
ПОЛЮСЫ И НУЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ .....	11
УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ .....	14
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ .....	17
<b>ЗАДАНИЕ НА ПРОВЕДЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ.....</b>	<b>22</b>
ПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЙ.....	22
ВАРИАНТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	23
<b>ПРИМЕР АНАЛИЗА.....</b>	<b>24</b>
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....</b>	<b>28</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>29</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Успехи интегральной технологии цифровых схем, а также развитие новых методов анализа и синтеза устройств цифровой обработки сигналов позволили за последнее время вытеснить из целого ряда приложений традиционную аналоговую технику обработки сигналов. К таким областям относятся радиолокация, телевидение, радиовещание, телефония, сети и телекоммуникации, средства мультимедиа, обработка речевых сигналов, распознавание образов, управление техническими устройствами и технологическими процессами, моделирование виртуальной реальности и т. д. Привлекательность устройств цифровой обработки сигналов определена их высокими возможностями по точности реализации заданных алгоритмов обработки сигналов.

Устройства цифровой обработки сигналов относятся к дискретным системам. Среди устройств цифровой обработки сигналов широкое распространение получили цифровые фильтры. В этих устройствах точность набора коэффициентов определяется лишь числом разрядов разрядной сетки. В цифровых фильтрах можно легко изменять коэффициенты, и, следовательно, характеристики фильтра, не изменяя структуры набора, что создает уникальные возможности осуществления алгоритмов обработки сигналов. Для разработчиков создаются самые широкие возможности для синтеза перестраиваемых, адаптивных и многофункциональных фильтров.

Учебное пособие направлено на развитие у студентов навыков по анализу дискретных фильтров 1-го и 2-го порядков, как базовых устройств цифровой фильтрации. В нем приведены краткие теоретические сведения, варианты заданий, а также пример анализа.



## ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

### Разностные уравнения и импульсные характеристики

Дискретные фильтры относятся к линейным дискретным системам с постоянными параметрами. Если пренебречь эффектам квантования входных сигналов, коэффициентов и результатов операций, то термин "дискретные фильтры" можно применять и для цифровых фильтров, алгоритмы которых реализуются либо в универсальных ЭВМ, либо в специализированных цифровых вычислителях.

Как для любой дискретной системы для дискретного фильтра справедливо выражение *дискретной свертки*

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k},$$

где  $y_n$  – отсчеты выходного сигнала,  $x_{n-k}$  – отсчеты входного сигнала, задержанные на  $k$  периодов дискретизации,  $h_k$  – отсчеты импульсной характеристики.

Еще одним уравнением, связывающим входные и выходные отсчеты дискретного фильтра, является *разностное уравнение*

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N a_i y_{n-i},$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  – коэффициенты фильтра;  $x_{n-i}$ ,  $y_{n-i}$  – отсчеты входного и выходного сигналов, задержанные на  $i$  периодов дискретизации;  $N$  – порядок фильтра.

Разностное уравнение представляет алгоритм цифрового фильтра.

*Импульсной характеристикой* дискретной системы называется ре-



## Цифровая обработка сигналов

акция системы на сигнал типа  $\delta$ -импульс

$$\delta_n = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

при нулевых начальных условиях.

Отсчеты импульсной последовательности можно получить, подавая на вход дискретной системы  $\delta$ -импульс (рисунок 1).

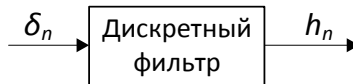


Рисунок 1 – Получение импульсной характеристики

В зависимости от вида импульсной характеристики фильтры подразделяются на [1]:

- фильтры с бесконечной импульсной характеристикой, рекурсивные или БИХ-фильтры;
- на фильтры с конечной импульсной характеристикой, нерекурсивные или КИХ-фильтры.

Для БИХ-фильтров разностное уравнение имеет вид

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N a_i y_{n-i} \quad (1)$$

а для КИХ-фильтров –

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} \quad (2)$$

Для расчета импульсной характеристики для фильтров второго порядка можно воспользоваться формулой

$$h_n = \sum_{i=0}^2 h_{i,n} \quad (3)$$



где 
$$h_{i,n} = b_i \left( r^* \right)^{n-i} \frac{\sin \left( (n+1-i) \varphi^* \right)}{\sin \varphi^*}, \quad n = i, i+1, i+2, \dots$$

Импульсная характеристика может быть также определена прямой подстановкой в разностное уравнение

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \quad (4)$$

входного сигнала – единичного импульса

$$x_n = \delta_n = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}. \quad (5)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} h_0 &= y_0 = b_0, \\ h_1 &= y_1 = b_1 - a_1 y_0 = b_1 - a_1 b_0, \\ h_2 &= y_2 = b_2 - a_1 y_1 - a_2 y_0 = b_2 - a_1 (b_1 - a_1 b_0) - a_2 b_0, \\ h_i &= -a_1 y_{i-1} - a_2 y_{i-2}, \quad i \geq 3. \end{aligned} \quad (6)$$

## Передаточные функции

Передаточной функцией  $H(z)$  фильтра (рисунок 2) называется отношение  $z$ -преобразования выходной последовательности к  $z$ -преобразованию входной последовательностей при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Z\{y_n\}}{Z\{x_n\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

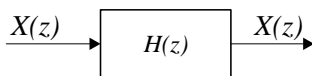


Рисунок 2 – Дискретный фильтр

Передаточную функцию можно получить, применив  $z$ -преобразование к разностному уравнению дискретного фильтра:



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}. \quad (7)$$

## Структуры дискретных фильтров

Разностные уравнения непосредственно определяют структуру цифровых фильтров [2].

Разностному уравнению соответствует структура ЦФ в *прямой форме*. Разностному уравнению 1-го порядка

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

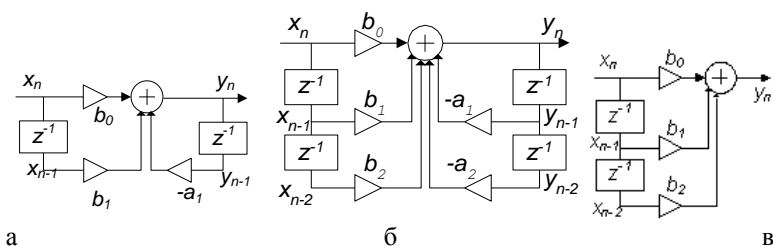
соответствует структура реализации в прямой форме (рисунок 2, а).

Разностному уравнению 2-го порядка

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}$$

соответствует структура реализации в прямой форме (рисунок 2, б).

Структурные схемы нерекурсивных ЦФ характерны наличием только прямых связей и отсутствием обратных (рисунок 2, в).



а – БИХ-фильтр 1-го порядка; б – БИХ-фильтр 2-го порядка;  
в – КИХ-фильтр 2-го порядка

Рисунок 2 – Прямая форма структур дискретных фильтров

Разностное уравнение 2-го порядка



## Цифровая обработка сигналов

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}$$

можно представить в виде [2]

$$v_n = x_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2}, \quad (8)$$

$$y_n = b_0 v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}.$$

Система уравнений описывает *каноническую структуру 1* ДФ 2-го порядка. Ей соответствует *каноническая структура 1* (рисунок 3).

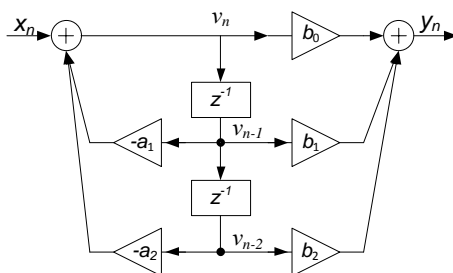


Рисунок 3 – Каноническая структура 1 ДФ

Аналогичный вид имеют структуры меньшего (первого) и большего порядков. Структуру называют канонической, поскольку она содержит минимальное количество элементов памяти.

Представим разностное уравнение РФ 2-го порядка

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}$$

в виде

$$y_n = b_0 x_n + v_{n-1} \quad (9)$$

где  $v_{n-1}$  – задержанная на 1 интервал дискретизации последовательность

$$v_n = b_1 x_n - a_1 y_n + d_{n-1} \quad (10)$$

Последовательность  $d_{n-1}$  в (10) — это задержанная на 1 интервал дискретизации последовательность



## Цифровая обработка сигналов

$$d_n = b_2 x_n - a_2 y_n \quad (11)$$

Действительно, подставив (11) в (10), а затем в (9), получим исходное разностное уравнение РФ 2-го порядка.

Система уравнений (9) - (11) описывает *каноническую структуру* 2 РФ 2-го порядка, показанную на рисунке 4.

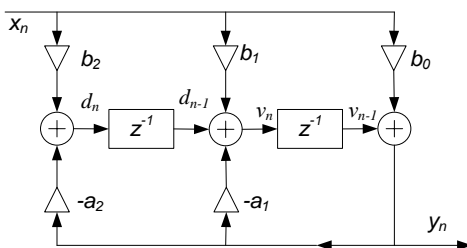


Рисунок 4 – Каноническая структура 2 РФ

Структура содержит минимальное количество элементов задержки. Аналогичный вид имеют структуры меньшего (первого) и большего порядков.

Рекурсивные фильтры высших порядков строят, как правило, в виде каскадной структуры. Представим передаточную функцию (7) в виде

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}} = \prod_{i=1}^R H_i(z)'$$

где  $H_i(z)$  - передаточные функции РФ 1-го или 2-го порядков, реализованные, в свою очередь, в виде прямой или канонической структур. Такое представление  $H(z)$  соответствует последовательному соединению  $R$  рекурсивных фильтров 1-го или 2-го порядков.

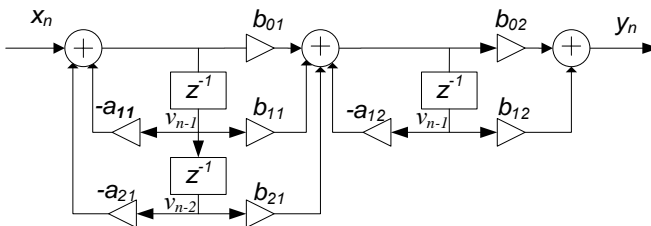


Рисунок 5 – Каскадная структура РФ 3-го порядка

На рисунке 5 показана каскадная структура РФ 3-го порядка. Она представляет собой последовательное соединение фильтра 2-го порядка и фильтра 1-го порядка. Каждый из фильтров реализован в виде канонической структуры.

## Полюсы и нули передаточной функции

При анализе дискретных фильтров имеет значение определение положения полюсов и нулей передаточной функции в  $z$ -плоскости.

Полюс – это корень полинома в знаменателе, а нуль – корень полинома в числителе передаточной функции. Если полином имеет вещественные коэффициенты, то его корни могут быть вещественными и/или комплексно-сопряженными.

При определении значений нулей и полюсов в  $z$ -плоскости целесообразно преобразовать передаточную функцию к виду без отрицательных степеней  $z$ .

Полином второй степени  $z^2 + a_1z + a_2$  имеет либо 2 *вещественных* корня при  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \geq 0$

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$



## Цифровая обработка сигналов

либо 2 комплексно-сопряженных корня при  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 0$

$$z_{1,2} = re^{\pm j\varphi}$$

где

$$r = \sqrt{a_2}, \quad \varphi = \arccos(a_1 / 2r).$$

Действительно, если разложить полином на простые множители, то получится

$$\begin{aligned} z^2 + a_1 z + a_2 &= (z - z_1)(z - z_2) = (z - re^{j\varphi})(z - re^{-j\varphi}) = \\ &= z^2 - 2r \cos \varphi z + r^2 \end{aligned}$$

**Базовый рекурсивный фильтр 1-го порядка.** Преобразуем к виду, без отрицательных степеней  $z$   $H(z) = z/(z + a_1)$ . Передаточная функция имеет один нуль в точке  $z_1^0 = 0$  и один полюс в точке  $z_1^* = -a_1$ . На рис. 2 изображены карты нулей и полюсов фильтра в  $z$ -плоскость при  $a_1 < 0$  и  $a_1 > 0$ .

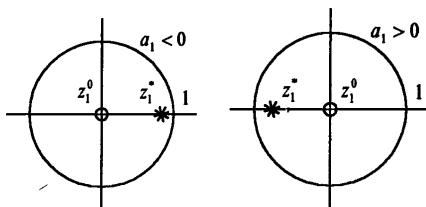


Рисунок 2 – Карты нулей и полюсов базового РФ 1-го порядка

**Рекурсивный фильтр 1-го порядка.** Для определения нулей и полюсов преобразуем передаточную функцию рекурсивного фильтра 1-го порядка к виду, без отрицательных степеней  $z$

$$H(z) = b_0 \frac{z + b_1/b_0}{z + a_1}.$$

Передаточная функция  $H(z)$  имеет один нуль в точке  $z_1^0 = b_1/b_0$  и один полюс в точке  $z_1^* = -a_1$ .



На рис. 3 изображена карта нулей и полюсов фильтра при  $b_o = 0.2$ ,  $b_I = -0.2$ ,  $a_I = 0.8$ .

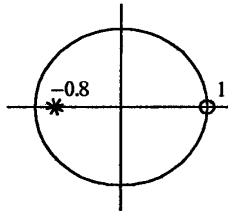


Рисунок 3 – Карта нулей и полюсов РФ 1-го порядка

**Базовый рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Рассмотрим случай комплексно-сопряженных полюсов. Передаточная функция

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

имеет два **НУЛЯ** в точке  $z_{1,2}^0 = 0$  и два полюса  $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$ , где  $r^* = \sqrt{a_2}$ ,  $\varphi^* = \arccos(a_1 / 2r^*)$ .

На рисунке 4 изображена карта нулей и полюсов фильтра в  $z$ -плоскости при  $a_I = -0.8$ ,  $a_2 = 0.64$ . При этом  $r^* = \sqrt{0.64} = 0.8$ ,  $\varphi^* = \arccos(0.8 / 2 \cdot 0.8) = \pi/3$ .

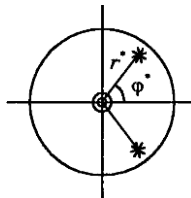


Рисунок 4 – Карта нулей и полюсов базового РФ 2-го порядка

**Рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Рассмотрим случай комплексно-сопряженных полюсов. Передаточная функция

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

имеет два полюса  $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$ ,  $r^* = \sqrt{a_2}$ ,  $\varphi^* = \arccos(a_1 / 2r^*)$ .



## Цифровая обработка сигналов

Два вещественных нуля  $z_1^0$  и  $z_2^0$  определяются выражением

$$z_{1,2}^0 = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4b_0^2} - \frac{b_2}{b_0}}.$$

Для комплексно-сопряженных нулей выражения имеют вид

$$z_{1,2}^0 = r^0 e^{\pm j\varphi^0},$$

$$\text{где } r^0 = \sqrt{b_2/b_0}, \varphi^0 = \arccos(-b_1/2\sqrt{b_0b_1}).$$

На рисунке 5 изображена карта нулей и полюсов фильтра в  $z$ -плоскости для двух случаев.

а)  $b_0=0.2, b_1=0, b_2=-0.2, a_1=0.9, a_2=0.81$  (вещественные нули).

В этом случае  $z_1^0=1, z_2^0=-1, z_{1,2}^*=r^* e^{\pm j\varphi^*}, r^*=0.9, \varphi^*=2\pi/3$ .

б)  $b_0=b_1=b_2=0.2, a_1=-0.6, a_2=0.36$  (комплексно-сопряженные нули).

В этом случае  $z_{1,2}^0 = 1 \cdot e^{\pm j\varphi^0}, \varphi^0 = 2\pi/3, z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}, r^*=0.6, \varphi^* = \pi/3$ .

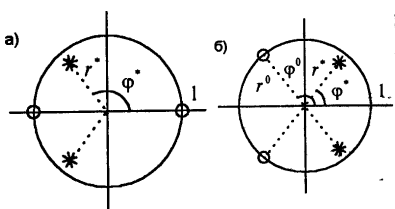


Рисунок 5 – Карты нулей и полюсов РФ 2-го порядка

## Устойчивость дискретных фильтров

Дискретный фильтр называется устойчивым, если при произвольных начальных условиях реакция  $y_n$  на любое ограниченное воздействие  $x_n$  также ограничена, т.е. если  $\max |x_n| \leq R_x$ , то  $\max |y_n| \leq R_y$ , где

$$R_x, R_y < \infty.$$



## Цифровая обработка сигналов

Критерием устойчивости дискретного фильтра является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики [2]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty \quad (12)$$

Действительно, если представить  $y_n$  в виде свертки входного сигнала и импульсной характеристики

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k},$$

то

$$|y_n| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| \leq R_x \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$$

откуда следует (12).

Существует другой критерий устойчивости дискретного фильтра: все полюса передаточной функции должны находиться внутри единичного круга  $z$ -плоскости (рисунок 6), т. е.

$$|z_k^*| < 1. \quad (13)$$

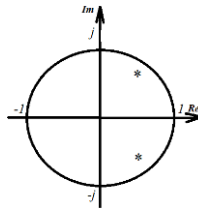


Рисунок 6 – Пояснение критерия устойчивости

Действительно, так как  $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$  [2], то можно получить

$$|H(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| |z^{-k}| \quad (14)$$

Допустим, что  $|z^{-1}| \leq 1$ , т.е.  $|z| \geq 1$ . Тогда  $|z^{-k}| \leq 1$  и из выражения



(14) получим

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$$

Для устойчивого фильтра должно выполняться условие (12), т. е.

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty.$$

Следовательно,  $H(z)$  должна быть конечна во всех точках  $z$ -плоскости, где  $|z| > 1$ . Очевидно, что в полюсе (при  $z = z_k^*$ )  $H(z) = \infty$ . Отсюда следует, что передаточная функция не должна иметь полюсов на единичной окружности и вне ее, т. е. должно выполняться условие (13).

Отметим, что:

- КИХ-фильтр всегда устойчив, так как его импульсная характеристика имеет конечную длину (2).
- Рекурсивный фильтр устойчив, если устойчивым является соответствующей ему базовый фильтр. Это объясняется тем, что нули передаточной функции (т. е. вид полинома в числителе) не влияют на устойчивость фильтра.

Условие (13) накладывает ограничения на величину коэффициентов знаменателя передаточной функции рекурсивного фильтра (таблица 1) [1].

Таблица 1 – Ограничения на коэффициенты РФ

Фильтр	Коэффициент $a_1$	Коэффициент $a_2$
1-го порядка	$ a_1  < 1$	нет
2-го порядка	$ a_1  < 2\sqrt{a_2} < 2$	$0 < a_2 < 1$



## Частотные характеристики дискретных фильтров

Частотной характеристикой  $H(e^{j\hat{\omega}})$  дискретного фильтра называется отношение преобразования Фурье выходной последовательности к преобразованию Фурье входной последовательности при нулевых начальных условиях

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{F\{y_n\}}{F\{x_n\}} = \frac{Y(e^{j\hat{\omega}})}{X(e^{j\hat{\omega}})} = \frac{Y(e^{j2\pi\hat{f}})}{X(e^{j2\pi\hat{f}})}, \quad (15)$$

где  $\hat{f} = f_d / f$  - нормализованная частота,  $f_d$  - частота дискретизации.

Частотная характеристика (ЧХ) представляет собой коэффициент передачи фильтра для каждого значения частоты  $\hat{\omega}(\hat{f})$ .

Из сравнения (15) и (7) видно, что ЧХ равна передаточной функции фильтра, вычисленной на единичной окружности  $z$ -плоскости (при  $z = e^{j\hat{\omega}} = e^{j2\pi\hat{f}}$ ):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}}. \quad (16)$$

Можно установить связь между значениями нормированной частоты  $\hat{f}$  и соответствующим углом  $\varphi$  в  $z$ -плоскости. Поскольку

$$e^{j\hat{\omega}} = e^{j2\pi\hat{f}} = \cos 2\pi\hat{f} + j \sin 2\pi\hat{f} = \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

то

$$\hat{f} = \varphi / 2\pi = \hat{\omega} / 2\pi.$$

На рисунке 7 показана связь точек единичной окружности и частот:

– точке  $z = 1 = \cos 0 + j \sin 0$  соответствует  $\hat{f} = 0$ ,  $\hat{\omega} = 2\pi \cdot 0$ ;

– точкам  $z = \pm j = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$  соответствуют  $\hat{f} = \pm 0.25$ ,

$$\hat{\omega} = \pm \frac{\pi}{2};$$



## Цифровая обработка сигналов

– точке  $z = -1 = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi)$  соответствуют  $\hat{f} = \pm 0.5$ ,  $\hat{\omega} = \pm\pi$ .

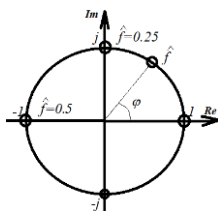


Рисунок 7 – Связь точек единичной окружности и частот  $\hat{f}$

Используя (16) можно записать общие формулы для частотных характеристик дискретных фильтров.

КИХ-фильтр:

$$H(j\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-j\hat{\omega}k} \quad (17)$$

БИХ-фильтр:

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\hat{\omega}k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k e^{-j\hat{\omega}k}} \quad (18)$$

Частотная характеристика  $H(e^{j\hat{\omega}})$  – комплексная функция. Ее можно представить в виде

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H_{\text{Re}}(e^{j\hat{\omega}}) + jH_{\text{Im}}(e^{j\hat{\omega}}) = A(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})}.$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется функция

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{H_{\text{Re}}^2(e^{j\hat{\omega}}) + H_{\text{Im}}^2(e^{j\hat{\omega}})}.$$

Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) называется функция

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg(H(e^{j\hat{\omega}})) = \arctan \frac{H_{\text{Im}}(e^{j\hat{\omega}})}{H_{\text{Re}}(e^{j\hat{\omega}})}.$$



## Цифровая обработка сигналов

АЧХ устанавливает связь между амплитудами, а ФЧХ – между фазами выходного  $y_n$  и входного  $x_n$  сигналов фильтра. Если

$$x_n = A_{\text{вх}} \cdot \cos(\hat{\omega}n + \varphi_{\text{вх}})$$

то в установившемся режиме

$$y_n = A_{\text{вых}} \cdot \cos(\hat{\omega}n + \varphi_{\text{вых}}),$$

где

$$A_{\text{вых}} = A_{\text{вх}} \cdot A(\hat{\omega}),$$

$$\varphi_{\text{вых}} = \varphi_{\text{вх}} + \varphi(\hat{\omega}).$$

Общие формулы АЧХ КИХ- и БИХ-фильтров получаются из (17) и (18):

$$A_{\text{КИХ}}(\hat{\omega}) = \sqrt{\left( \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(\hat{\omega}k) \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(\hat{\omega}k) \right)^2},$$

$$A_{\text{БИХ}}(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(\hat{\omega}k) \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(\hat{\omega}k) \right)^2}{\left( \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos(\hat{\omega}k) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin(\hat{\omega}k) \right)^2}}.$$

Для того, чтобы представить частотную характеристику фильтра или спектральный состав дискретной последовательности не в безразмерных единицах нормированной частоты, а в единицах частоты, связанной с периодом дискретизации  $T_d$ . В этом случае пользуются соотношением для нормализованной частоты

$$\hat{\omega} = 2\pi \hat{f} = 2\pi \frac{f}{f_d} = 2\pi f T_d \quad (19)$$

т.е.  $\omega = \frac{\hat{\omega}}{T_d}$  или  $f = \frac{\hat{f}}{T_d}$ .

Например, при  $T_d = 1 \text{ мс} = 0.001 \text{ с}$  частотная характеристика периодична с частотой дискретизации  $f_d = 1/10^{-3} = 1000 \text{ Гц}$ , а



$$\omega = \frac{\hat{\omega}}{T_d} = 2 \cdot 10^3 \pi \text{ c}^{-1}.$$

Базовый рекурсивный дискретный фильтр 1-го порядка. Базовым дискретным фильтром 1-го порядка называется фильтр, описываемый разностным уравнением

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Применив  $z$ -преобразование к правой и левой частям, получим

$$Y(z) = X(z) - a_1 z^{-1} Y(z).$$

Следовательно, передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

При  $z = e^{j\omega}$  получаем частотную характеристику

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-j\omega}},$$

АЧХ

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + a_1 \cos \omega)^2 + a_1^2 \sin^2 \omega}},$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{a_1 \sin \omega}{1 + a_1 \cos \omega}.$$

Как известно, необходимым и достаточным условием устойчивости фильтра является расположение полюсов передаточной функции внутри единичного круга комплексной плоскости. Для фильтров 1-го порядка это обеспечивается при  $|a_1| < 1$ .

Рекурсивный фильтр 1-го порядка. Разностное уравнение имеет вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ПФ:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$



## Цифровая обработка сигналов

ЧФ:

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}}$$

АЧХ:

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega})^2 + (b_1 \sin \hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}}$$

ФЧХ:

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\arctan \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} + \arctan \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}}$$

Рекурсивный фильтр 2-го порядка. Разностное уравнение имеет

вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ПФ:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

ЧХ

$$H(j\hat{\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + b_2 e^{-j2\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + a_2 e^{-j2\hat{\omega}}}$$

АЧХ:

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega} + b_2 \cos 2\hat{\omega})^2 + (b_1 \sin \hat{\omega} + b_2 \sin 2\hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega})^2}} \quad (20)$$

ФЧХ:

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\arctan \frac{b_1 \sin \hat{\omega} + b_2 \sin 2\hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega} + b_2 \cos 2\hat{\omega}} + \arctan \frac{a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega}} \quad (21)$$

Вид АЧХ и ФЧХ фильтра можно определить путем расчета на ЭВМ по (20) и (21). Полезно знать, что значения АЧХ легко определяются на границах основной полосы частот (для  $\hat{\omega} = 0$  и  $\hat{\omega} = \pi$ ). Из (20) получим

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|, \quad A(\pi) = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|$$



## ЗАДАНИЕ НА ПРОВЕДЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

Выполнить исследования фильтра, имеющего передаточную функцию

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

в соответствии с представленной программой исследования и вариантами задания, представленными в таблице 2.

### Программа исследований

1. Записать разностное уравнение.
2. Изобразить структуру фильтра.
3. Рассчитать значения нулей и полюсов.
4. Изобразить карту нулей и полюсов
5. Оценить устойчивость фильтра.
7. Рассчитать 10 отсчетов импульсной характеристики по формуле (3) или по разностному уравнению (4)-(6).
8. Изобразить график импульсной характеристики (10 отсчетов).
9. Записать формулу частотной характеристики.
- 10 Записать формулу АЧХ.
- 11 Рассчитать значения АЧХ на частотах  $\hat{\omega}=0$  ( $\hat{f}=0$ ),  $\hat{\omega}=\pi$  ( $\hat{f}=0.5$ ) и  $\hat{f}=\hat{f}^*$ , где  $\hat{f}^*$  - частота, соответствующая углу  $\varphi^*$ , на котором расположен полюс в z-плоскости.
12. Выполнить нормировку передаточной функции фильтра.
13. Построить график АЧХ фильтра на интервале нормированных



частот  $\omega \in [0, \pi]$ .

14. Построить график АЧХ фильтра на интервале частот  $f \in [0, f_d]$ .

15. Для фильтров первого порядка получить зависимость нормированной частоты среза фильтра от коэффициента  $a_1$

## Варианты исследований

Таблица 2. Варианты заданий

№ варианта	Коэффициенты					Частота дискретизации $f_d$ , кГц	Примечание
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$		
1	0.1	0	0	-0.2	0	500	
2	0	1	-1	0.1	0.1	250	
3	0.1	0	0.1	0.2	-0.3	200	
4	1	0	-1	-0.2	-0.2	100	
5	-0.2	0	0.2	-0.4	0.7	50	
6	-0.5	0.5	0	0	0.3	40	
7	-0.3	0	0	0.4	0	25	
8	0	0.5	-0.5	0.5	-0.4	20	
9	0.4	0	0	-0.6	0	10	
10	0.4	0	0.4	1.0	0.5	5	
11	0.5	0	-0.5	0.6	0.9	4	
12	-0.4	-0.5	0	-0.2	-0.6	2.5	
13	-0.6	0	-0.6	-0.8	0.3	2.0	
14	0	-1	-1	1.5	0.7	1.0	
15	-0.7	0	0	0.8	0	0.5	
16	0.7	0	0.7	0.1	-0.8	0.4	
8	0.4	0	0	-0.2	0.3	20	
9	0	1	-1	0.5	0.1	10	
10	0.1	0	0.5	0.6	-0.3	5	
11	1	0	-1	-0.7	0.2	4	
12	-0.2	0.2	0.2	0.4	-0.7	2.5	
13	-0.5	0.5	0.2	0	-0.8	2.0	
14	-0.3	0	-0.3	-0.4	0	1.0	
15	0	0.5	-0.5	0.5	-0.4	0.5	
16	0.4	-0.3	0	-0.6	0.7	0.4	

Студенты выбирают номер варианта в соответствии с номером фамилии в групповом журнале.



## ПРИМЕР АНАЛИЗА

№ варианта	Коэффициенты					Частота дискретизации $f_d$ , кГц	Примечание
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$		
17	0.6	0	-0.6	-1.32	0.85	1000	

Решение

1. Составляем передаточную функцию

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0.6 - 0.6 z^{-2}}{1 - 1.32 z^{-1} + 0.85 z^{-2}} = \\
 &= 0.6 \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.32z + 0.85}.
 \end{aligned}$$

2. Разностное уравнение однозначно определяется передаточной функцией

$$y_n = 0.6x_n - 0.6x_{n-2} + 1.32y_{n-1} - 0.85y_{n-2}.$$

3. Структура приведена на рисунке 8.

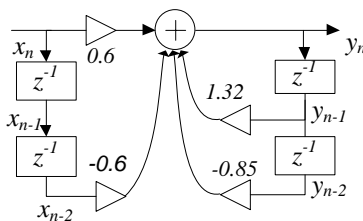


Рисунок 8 – Структура фильтра и разностное уравнение

4. Определяем значения нулей и полюсов. Для определения нулей решаем уравнение числителя передаточной функции:

$$0.6 - 0.6z^{-2} = 0, \quad z_{1,2}^0 = \pm 1.$$

Для определения полюсов решаем уравнение знаменателя переда-



точной функции. Так как разность  $a_1^2 - 4 \cdot a_2 = -1.658$  отрицательна, следовательно, полюсы комплексно-сопряженные:

$$z_{1,2} = r e^{\pm j\varphi}, \quad r = \sqrt{a_2} = \sqrt{0.85} = 0.922, \quad \varphi = \arccos(a_1 / 2r) = 2.37 = 135.7^\circ.$$

Карта нулей и полюсов показана на рисунке 8.

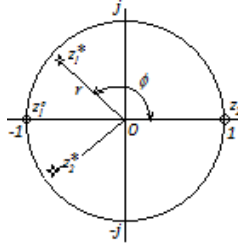


Рисунок 9 – Карта нулей и полюсов

5. Фильтр устойчив, поскольку  $r^* = |z_{1,2}^*| < 1$

6. Импульсная характеристика. Для расчета импульсной характеристики можно воспользоваться формулой (3). Для фильтра второго порядка эта формула трансформируется в выражения

$$h_0 = b_0 \frac{\sin(\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)},$$

$$h_1 = b_0 \cdot r \frac{\sin(2\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)} + b_1 \frac{\sin(\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)}, \quad (22)$$

$$h_n = b_0 r^n \frac{\sin((n+1)\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)} + b_1 r^{n-1} \frac{\sin(n\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)} + b_2 r^{n-2} \frac{\sin((n-1)\varphi^*)}{\sin(\varphi^*)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\text{где } r := \sqrt{a_2} \quad r=0.922; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r}\right) = 0.773.$$

Можно также использовать **метод прямой подстановки** в разностное уравнение в соответствии с формулами (4) - (6). Результаты расчета



## Цифровая обработка сигналов

импульсной характеристики (с точностью до 4-х знаков после запятой) приведены в таблице 3 и на рисунке 10.

Совпадение результатов расчета по разностному уравнению (4) - (6) и формулам (22) для фильтра второго порядка является подтверждением правильности расчета импульсной характеристики.

Таблица 3 – Импульсная характеристика

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$h_i$	0.6	0.792	0.065	0.758	0.946	0.604	0.007	0.552	0.684	0.459	0.024	0.358	0.493	0.347	0.038

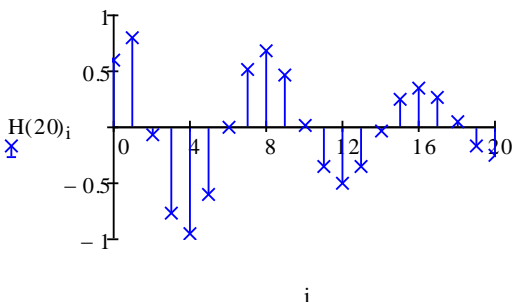


Рисунок 10 – Импульсная характеристика

### 7. Частотная характеристика

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{0.6 - 0.6e^{-2j\hat{\omega}}}{1 - 1.32e^{-j\hat{\omega}} + 0.85e^{-j2\hat{\omega}}}$$

### 8. Амплитудно-частотная характеристика $A(\hat{\omega})$

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{(0.6 - 0.6 \cos 2\hat{\omega})^2 + (0.6 \sin 2\hat{\omega})^2}{(1 - 1.32 \cos \hat{\omega} + 0.85 \cos 2\hat{\omega})^2 + (-1.32 \sin \hat{\omega} + 0.85 \sin 2\hat{\omega})^2}}.$$

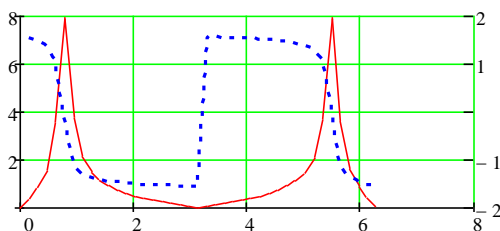
АЧХ и ФЧХ от нормированной частоты  $\hat{\omega}$  представлены на рисунке 10.



## Цифровая обработка сигналов

$A(\hat{\omega})$

$\varphi(\hat{\omega})$



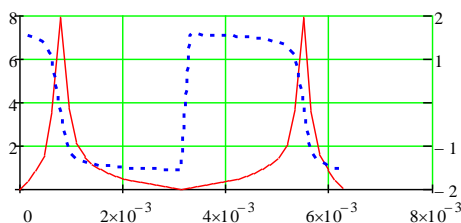
$\hat{\omega}$

Рисунок 10 – Графики АЧХ и ФЧХ (нормированная частота  $\hat{\omega}$ )

9. Воспользовавшись выражением  $f = \hat{\omega}/2\pi T_d$ , строим графики АЧХ на интервале частот  $f \in [0, f_d]$  (рисунок 11).

$A(f)$

$\varphi(f)$



$f, \text{кГц}$

Рисунок 11 – Графики АЧХ и ФЧХ (частота колебаний  $f$ )

10. Расчет значений АЧХ.

$$A(0) = 0, \quad A(\pi) = 0.3785, \quad A(0.7729) = 4.3147.$$

11. Нормировка фильтра:  $q_n = 1/4.3147 = 0.2318$ ,

$$H_n(z) = \frac{0.1391 - 0.1391z^{-2}}{1 - 1.32z^{-1} + 0.85z^{-2}}.$$

Для исследования фильтров рекомендуется использовать программу математических вычислений Mathcad [3].



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется передаточной функцией?
2. Как связано разностное уравнение дискретного фильтра с его передаточной функцией?
3. Запишите формулы для передаточных функций основных типов фильтров.
4. Охарактеризуйте импульсную характеристику ДФ.
5. Представьте структуры фильтров первого и второго порядков.
6. Что понимается под частотной характеристикой дискретного фильтра?
7. Как связана передаточная функция дискретного фильтра с его частотной характеристикой?
8. Что понимается под АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра?
9. Назовите основные свойства частотной характеристики ДФ.
10. Какое ограничение накладывает свойство периодичности частотной характеристики ДФ на спектр входного сигнала?
11. Дайте понятие устойчивости ДФ.
12. Приведите критерии устойчивости ДФ.
13. Какое положение на комплексной  $z$ -плоскости занимают полюсы устойчивых (неустойчивых) ДФ?
14. Какие ограничения накладывает требование устойчивости на коэффициенты передаточной функции фильтра 1-го и 2-го порядков.
15. Как переходят от ненормированной частоты к нормированной и обратно?



## ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко Ф.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2002.
2. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. - 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 1999.
3. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCAD 12 – СПб.: Питер, 2006.